Varianta 23

Subiectul I.

a) $AB = 2$

b) 1.

c) $|z| = 5$.

d) Există un singur punct de intersecție între dreaptă şi cerc.

e) Verificare directă.

f) $\sin B - \cos C = 0$.

Subiectul II.

1.

a) $f(1) + f(2) + ... + f(10) = 165$.

b) $C_{10}^{1} + C_{10}^{9} = 20$.

c) Probabilitatea căutată este $p = \frac{4}{5}$.

d) Restul împărțirii lui f la g este $r = 1$.

e) $x \in \{-1, 1\}$.

2.

a) $f'(x) = 2e^{2x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{e^2 - 1}{2}$.

c) $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2e^2$.

e) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t)\,dt = 1$.

Subiectul III.

a) Pentru $k = 2$ avem $A^2 = O_2$, deci $A \in M$.

b) Se demonstrează prin calcul direct.

c) Se demonstrează prin calcul direct.

d) Considerăm $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M \Rightarrow \exists k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, astfel ca $X^k = O_2 \Rightarrow$

$\det(X) = 0$.

Din **b)** obținem, prin inducție, că $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $X^n = t^{n-1} \cdot X$.

Pentru $n = k$ avem $X^k = t^{k-1} \cdot X = O_2$, deci $X = O_2$ sau $t = 0$.

Dacă $t = 0$, din (1) deducem că $X^2 = O_2$, iar dacă $X = O_2$, evident că şi $X^2 = O_2$.

e) Se arată că nu există $Z \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $Z^n = A$.

f) Din punctul **e)** deducem că $A \notin \operatorname{Im} f$, deci f nu este surjectivă.

g) Considerăm $B \in M$.

Din punctele anterioare deducem că $tr(B) = \det(B) = 0$ şi există $a, b, c \in \mathbf{C}$ astfel ca $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Obţinem $\det(I_2 + B + B^2 + ... + B^{n-1}) = \det(I_2 + B) = 1 - a^2 - bc = 1$.

Subiectul IV.

a) Rădăcinile funcţiei f_n sunt: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, $x_{n+1} = x_{n+2} = ... = x_{2n} = \dfrac{a}{b}$.

b) $J_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{a}{b}} f_1(x) \cdot \sin x \, dx = 2b - a \cdot \sin\frac{a}{b} - 2b \cdot \cos\frac{a}{b}$.

c) Funcţia f_1 este continuă, deci îşi atinge marginile pe $[0, \pi]$,

aşadar există $M > 0$ astfel încât pentru orice $x \in [0, \pi]$, avem $|f_1(x)| \le M$.

d) Se foloseşte criteriul raportului.

e) Pentru $x \in [0, \pi]$, $|f_n(x) \cdot \sin x| \le \left|\dfrac{1}{n!} x^n (a - bx)^n\right| = \dfrac{1}{n!}\left|(f_1(x))^n\right| \overset{\text{b)}}{\le} \dfrac{M^n}{n!}$.

Mai mult, $\left|\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(x) \cdot \sin x \, dx\right| \le \displaystyle\int_0^{\pi} |f_n(x) \cdot \sin x| \, dx \le \pi \cdot \frac{M^n}{n!} \to 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

f) Se arată prin calcul direct.

g) Presupunem că există $a, b \in \mathbf{Z}^*$ astfel încât $\pi = \dfrac{a}{b}$.

Din **f)** rezultă că $J_n \in \mathbf{N}^*$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Dar pentru $\pi = \dfrac{a}{b}$, avem că $J_n = I_n$, iar la punctul **e)** am demonstrat că

$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, contradicţie. Aşadar $\pi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.